

2023 年度 第 34 回
臨床試験 統計手法専門コース(34BioS)
入学試験

2023 年 4 月 20 日

以下の問題についてその導出過程を含めて解答して下さい。関数電卓の使用は認めますが、スマートフォンやタブレットに搭載されている電卓機能の利用は認めません。問題用紙、解答用紙には必ず番号と名前を書いて下さい。試験後、解答用紙を回収します。

| | |
|------|--|
| 参加番号 | |
| 組織名 | |
| 名前 | |

問題1

1, 2 については x に関する導関数(微分)を, 3 については不定積分, 4 については積分結果を数値で答えよ.

1. $\log\left(\frac{10}{5}\right) + 5 \log(x) + 5 \log(1-x)$

2. $\frac{1}{1+\exp(x)}$

3. $\int x \exp(x) dx$

4. $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$

問題2

以下の行列及びベクトル A から E について, 次の問いに答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{12} & e_{22} \end{pmatrix}$$

1. 積 AB を求めよ.
2. A の転置行列 A^t を求めよ.
3. A の行列式 $\det(A)$ を求めよ.
4. B の逆行列 B^{-1} を求めよ.
5. B のトレース $\text{tr}(B)$ を求めよ.
6. $\mathbf{d}^t \mathbf{c}$ を \mathbf{d} で微分せよ.
7. $\mathbf{d}^t E \mathbf{d}$ を \mathbf{d} で微分せよ.

問題3

X_1 及び X_2 は確率変数であり, それぞれ等確率で $\{2, 4, 6, 8\}$ のいずれかの値をとる. $Y = X_1 + X_2$ について, 以下の問いに答えよ.

1. Y のとり得る値をすべて示せ.
2. Y の確率分布を示せ.
3. Y の中央値(Y_{median})を求めよ.
4. 3 で求めた中央値について, $\Pr(Y > Y_{median})$ を求めよ.

問題4

確率変数 X は平均 μ , 分散 σ^2 の正規分布 $Normal(\mu, \sigma^2)$ に従うとする. このとき, 以下の値を求めよ.
なお, 別添の標準正規分布表を用いてよい.

1. $\Pr(X < \mu)$
2. $\Pr(X > \mu - 1.96\sigma)$
3. $\Pr(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$
4. 確率変数 X が $Normal(50, 100)$ に従うとき, $\Pr(X < 60)$ を求めよ.

問題5

ある病院ではインフルエンザ治療薬として A 薬を使用している. A 薬の有効確率を p とする. いま, この病院で A 薬を処方された患者をランダムに n 人選び, 有効例数を x 人とする. 各患者の有効性の有無に関する結果は互いに独立とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

1. 有効例数 x が従う確率関数を示せ.
2. 有効例数 x の期待値を求めよ.
3. 有効例数 x の分散を求めよ.
4. 有効例数 x の分散が最も大きくなる p を求めよ.
5. p の最尤推定量を求めよ.
6. p の最尤推定量の分散を求めよ.

問題6

6組のデータが以下のように得られている。

| | | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| y | 0 | 2 | 3 | 3 | 4 | 6 |

いま、線型モデル $\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}$ を仮定し、最小二乗法を用いて回帰分析を行うことを考える。パラメータベクトル $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)^t$ の推定値は、計画行列 X 、ベクトル \mathbf{y} を用いて、以下の式により求めることができる。

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (X^t X)^{-1} X^t \mathbf{y}$$

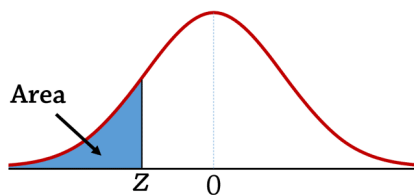
$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ。

- $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を求めよ。
- 予測値 $X\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を求めよ。
- 以上の計算結果に基づき、以下の分散分析表の①～⑨を求めよ。

| | 平方和 | 自由度 | 平均平方 | F 値 |
|----|-----|-----|------|-----|
| 回帰 | ① | ④ | ⑦ | ⑨ |
| 残差 | ② | ⑤ | ⑧ | |
| 全体 | ③ | ⑥ | | |

標準正規分布表



| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| -3.4 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0002 |
| -3.3 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0003 |
| -3.2 | 0.0007 | 0.0007 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 |
| -3.1 | 0.0010 | 0.0009 | 0.0009 | 0.0009 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0007 | 0.0007 |
| -3.0 | 0.0013 | 0.0013 | 0.0013 | 0.0012 | 0.0012 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0010 | 0.0010 |
| -2.9 | 0.0019 | 0.0018 | 0.0018 | 0.0017 | 0.0016 | 0.0016 | 0.0015 | 0.0015 | 0.0014 | 0.0014 |
| -2.8 | 0.0026 | 0.0025 | 0.0024 | 0.0023 | 0.0023 | 0.0022 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0020 | 0.0019 |
| -2.7 | 0.0035 | 0.0034 | 0.0033 | 0.0032 | 0.0031 | 0.0030 | 0.0029 | 0.0028 | 0.0027 | 0.0026 |
| -2.6 | 0.0047 | 0.0045 | 0.0044 | 0.0043 | 0.0041 | 0.0040 | 0.0039 | 0.0038 | 0.0037 | 0.0036 |
| -2.5 | 0.0062 | 0.0060 | 0.0059 | 0.0057 | 0.0055 | 0.0054 | 0.0052 | 0.0051 | 0.0049 | 0.0048 |
| -2.4 | 0.0082 | 0.0080 | 0.0078 | 0.0075 | 0.0073 | 0.0071 | 0.0069 | 0.0068 | 0.0066 | 0.0064 |
| -2.3 | 0.0107 | 0.0104 | 0.0102 | 0.0099 | 0.0096 | 0.0094 | 0.0091 | 0.0089 | 0.0087 | 0.0084 |
| -2.2 | 0.0139 | 0.0136 | 0.0132 | 0.0129 | 0.0125 | 0.0122 | 0.0119 | 0.0116 | 0.0113 | 0.0110 |
| -2.1 | 0.0179 | 0.0174 | 0.0170 | 0.0166 | 0.0162 | 0.0158 | 0.0154 | 0.0150 | 0.0146 | 0.0143 |
| -2.0 | 0.0228 | 0.0222 | 0.0217 | 0.0212 | 0.0207 | 0.0202 | 0.0197 | 0.0192 | 0.0188 | 0.0183 |
| -1.9 | 0.0287 | 0.0281 | 0.0274 | 0.0268 | 0.0262 | 0.0256 | 0.0250 | 0.0244 | 0.0239 | 0.0233 |
| -1.8 | 0.0359 | 0.0351 | 0.0344 | 0.0336 | 0.0329 | 0.0322 | 0.0314 | 0.0307 | 0.0301 | 0.0294 |
| -1.7 | 0.0446 | 0.0436 | 0.0427 | 0.0418 | 0.0409 | 0.0401 | 0.0392 | 0.0384 | 0.0375 | 0.0367 |
| -1.6 | 0.0548 | 0.0537 | 0.0526 | 0.0516 | 0.0505 | 0.0495 | 0.0485 | 0.0475 | 0.0465 | 0.0455 |
| -1.5 | 0.0668 | 0.0655 | 0.0643 | 0.0630 | 0.0618 | 0.0606 | 0.0594 | 0.0582 | 0.0571 | 0.0559 |
| -1.4 | 0.0808 | 0.0793 | 0.0778 | 0.0764 | 0.0749 | 0.0735 | 0.0721 | 0.0708 | 0.0694 | 0.0681 |
| -1.3 | 0.0968 | 0.0951 | 0.0934 | 0.0918 | 0.0901 | 0.0885 | 0.0869 | 0.0853 | 0.0838 | 0.0823 |
| -1.2 | 0.1151 | 0.1131 | 0.1112 | 0.1093 | 0.1075 | 0.1056 | 0.1038 | 0.1020 | 0.1003 | 0.0985 |
| -1.1 | 0.1357 | 0.1335 | 0.1314 | 0.1292 | 0.1271 | 0.1251 | 0.1230 | 0.1210 | 0.1190 | 0.1170 |
| -1.0 | 0.1587 | 0.1562 | 0.1539 | 0.1515 | 0.1492 | 0.1469 | 0.1446 | 0.1423 | 0.1401 | 0.1379 |
| -0.9 | 0.1841 | 0.1814 | 0.1788 | 0.1762 | 0.1736 | 0.1711 | 0.1685 | 0.1660 | 0.1635 | 0.1611 |
| -0.8 | 0.2119 | 0.2090 | 0.2061 | 0.2033 | 0.2005 | 0.1977 | 0.1949 | 0.1922 | 0.1894 | 0.1867 |
| -0.7 | 0.2420 | 0.2389 | 0.2358 | 0.2327 | 0.2296 | 0.2266 | 0.2236 | 0.2206 | 0.2177 | 0.2148 |
| -0.6 | 0.2743 | 0.2709 | 0.2676 | 0.2643 | 0.2611 | 0.2578 | 0.2546 | 0.2514 | 0.2483 | 0.2451 |
| -0.5 | 0.3085 | 0.3050 | 0.3015 | 0.2981 | 0.2946 | 0.2912 | 0.2877 | 0.2843 | 0.2810 | 0.2776 |
| -0.4 | 0.3446 | 0.3409 | 0.3372 | 0.3336 | 0.3300 | 0.3264 | 0.3228 | 0.3192 | 0.3156 | 0.3121 |
| -0.3 | 0.3821 | 0.3783 | 0.3745 | 0.3707 | 0.3669 | 0.3632 | 0.3594 | 0.3557 | 0.3520 | 0.3483 |
| -0.2 | 0.4207 | 0.4168 | 0.4129 | 0.4090 | 0.4052 | 0.4013 | 0.3974 | 0.3936 | 0.3897 | 0.3859 |
| -0.1 | 0.4602 | 0.4562 | 0.4522 | 0.4483 | 0.4443 | 0.4404 | 0.4364 | 0.4325 | 0.4286 | 0.4247 |
| -0.0 | 0.5000 | 0.4960 | 0.4920 | 0.4880 | 0.4840 | 0.4801 | 0.4761 | 0.4721 | 0.4681 | 0.4641 |