2025 年度 第 36 回

臨床試験 統計手法専門コース（36BioS）

入学試験

2025 年 4 月 17 日

参加番号	
組 織 名	
名　　前	

一般財団法人日本科学技術連盟

以下の問題について，その導出過程を含めて解答せよ．

問題1：微分・積分

以下(1)及び(2)についてはxで微分し，(3)から(5)については与えられた定積分を計算せよ．ただし，λは定数とする．

(1) $\log(x^2+2x+2)$

(2) $\lambda\exp(-\lambda x)$,

(3) $\int_1^2 e^x dx$,

(4) $\int_1^2 xe^{-x} dx$

(5) $\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$

問題2：確率の基礎

事象Aと事象Bの生起確率は，それぞれ$\mathrm{Pr}(A)=0.5$，$\mathrm{Pr}(B)=0.3$であり，同時確率は$\mathrm{Pr}(A\cap B)=0.1$とする．このとき，以下の確率をそれぞれ求めよ．

(1) $\mathrm{Pr}(A|B)$

(2) $\mathrm{Pr}(B|A)$

(3) $\mathrm{Pr}(A|A\cup B)$

(4) $\mathrm{Pr}(A|A\cap B)$

(5) $\mathrm{Pr}(A\cap B|A\cup B)$

問題3：確率密度関数

確率変数Yは，以下の確率密度関数に従うものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

$$f(y)=\begin{cases} y, & 0\le y\le 1 \\ 1, & 1<y\le 1.5 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(1) $f(y)$の分布関数$F(y)$を求め，図示せよ．なお，縦・横軸の目盛りを明示すること．

(2) $\mathrm{Pr}(0\le Y\le 0.5)$を求めよ．

(3) $\mathrm{Pr}(0.5\le Y\le 1.2)$を求めよ．

問題4：t 検定

6 人の被験者に対し，ある新薬の投与前と投与後に拡張期血圧（mmHg）を測定した結果，表 1 のデータが得られた．以下の問いに答えよ．

表 1. 新薬投与前後の拡張期血圧（mmHg）

被験者番号	投与前	投与後
1	80	79
2	90	85
3	85	80
4	75	75
5	80	78
6	70	65

(1) 投与前と投与後の拡張期血圧の差（投与後－投与前）について，以下の統計量を計算せよ．

(a)算術平均，(b)中央値，(c)不偏分散，(d)標準偏差，(e)標準誤差

(2) 投与前後の拡張期血圧の差に対する両側検定を実施したい．投与前の母平均をμ_1，投与後の母平均をμ_2とおくとき，当該検定の帰無仮説及び対立仮説をμ_1及びμ_2を用いてそれぞれ数式で示せ．

(3) (2)の検定における t 検定統計量を求めよ．

(4) (2)の検定を有意水準（両側）5%で行う場合，その棄却限界値を以下の t 分布表を用いて示せ．

表 2. t 分布表

	自由度νの 100×αパーセント点			
自由度(ν)	α = 0.05	0.025	0.01	0.005
4	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554

問題5:離散分布

次の 2 元表は 2 つの離散型確率変数X及びYの同時確率分布を示す. 以下の問いに答えよ.

表 3．離散型確率変数X及びYの同時確率分布

	Y = 1	2	3
X = 1	1/10	2/10	1/10
2	2/10	1/10	1/10
3	①	1/20	1/20

(1) 表 3 の①に入る確率を求めよ.

(2) Xの周辺分布と, Yの周辺分布をそれぞれ求めよ.

(3) $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$, $V(X)$, $V(Y)$をそれぞれ求めよ. ただし, Eは期待値, Vは分散を意味する.

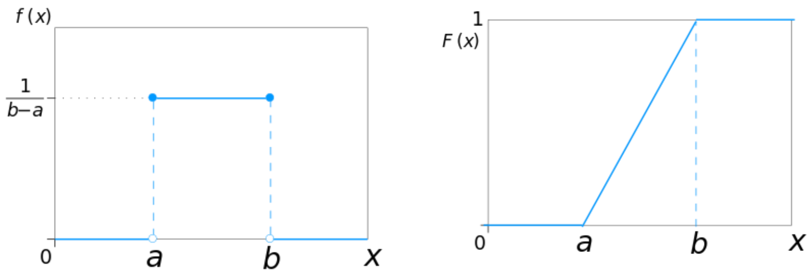
(4) XとYの相関係数を求めよ.

問題6：一様分布

区間$[a, b]$の一様分布$U(a, b)$について，以下の問いに答えよ．

（1）一様分布$U(a, b)$の確率密度関数を示せ．

（2）一様分布$U(a, b)$の確率密度関数および分布関数を図示せよ．なお，縦・横軸の目盛りを明示すること．



（3）一様分布$U(a, b)$の期待値を求めよ．なお，導出過程を明示すること．

（4）一様分布$U(a, b)$の分散を求めよ．なお，導出過程を明示すること．

問題7：回帰分析

表 4 の 5 組のデータについて，次の線型モデルを仮定し，最小 2 乗法を用いて回帰分析を行うことを考える．

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, i = 1, \dots ,5 \quad ①$$

ここで，α, βはそれぞれ切片と回帰係数を表す．ε_iは誤差を表し，互いに独立に正規分布$N(0, \sigma^2)$に従うものとする．以下の問いに答えよ．

表 4. 5 組のデータ

x	2	4	6	8	10
y	1	5	5	9	9

(1) ①式の線型モデルを計画行列 X，回帰係数ベクトル$\boldsymbol{\beta} = (\alpha, \beta)^t$，誤差ベクトル$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5)^t$を用いて表す場合に，計画行列 X を示せ．なお，$t$は転置を表す．

(2) Xの転置行列(X^t)を示せ．

(3) $X^t X$を求めよ．

(4) 逆行列$(X^t X)^{-1}$を求めよ．

(5) 回帰係数の推定値ベクトル$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$を求めよ．

(6) 回帰モデルによる予測値$X\widehat{\boldsymbol{\beta}}$を求めよ．